Κατανομή συνάρτησης τ.μ - Αλλαγή μεταβλητών

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Έστω τ.μ. X με γνωστή κατανομή. Έστω g μια πραγματική συνάρτηση και έστω τ.μ $Y = g(X)$

Εύρεση της κατανομής της τ.μ Y

Παρατήρηση

1) η τ.μ X είναι διακριτή.

Μέθοδος της σ.π

Έστω διακριτή τ.μ X με τιμές $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ και γνωστή σ.π $P_X(x_i)$ $i = 1, 2, \dots, n, \dots$

Η τ.μ $Y = g(X)$ θα έχει σύνολο τιμών $y_i = g(x_i)$ $i = 1, 2, \dots$

και σ.π $P_Y(y_i) = P(Y = y_i) = P(g(X) = y_i) = \dots$

Παράδειγμα

1. Έστω τ.μ X με τιμές $x = 0, 1, 2$ και σ.π $P_X(x) = \frac{1}{3}$

Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ $Y = 2X + 1$

Οι τιμές της Y: $y = 2x + 1$ $y = 1, 3, 5$

$P_Y(1) = P(Y=1) = P(2X+1 = 1) = P(X=0) = P_X(0) = \frac{1}{3}$

$P_Y(3) = P(Y=3) = P(2X+1 = 3) = P(X=1) = P_X(1) = \frac{1}{3}$

$P_Y(5) = P(Y=5) = \dots = P_X(2) = \frac{1}{3}$

$$P_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & , y = 1,3,5 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

2. τ.μ X $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$. και σ.π $P_X(x) = \frac{1}{7}$ $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$

Να βρεθεί κατανομή τ.μ $Y = X^2$

Τιμές Y: $y = x^2$ $y = 0, 1, 4, 9$

$P_Y(0) = P(Y=0) = P(X^2 = 0) = P(X=0) = P_X(0) = \frac{1}{7}$

$P_Y(1) = P(Y=1) = P(X^2 = 1) = P(X=1 \text{ ή } X=-1) = P(X=1) + P(X=-1) =$

$= P_X(1) + P_X(-1) = \frac{2}{7}$

$P_Y(4) = \dots = P(X=-2 \text{ ή } X=2) = P_X(2) + P_X(-2) = \frac{2}{7}$

$P_Y(9) = \dots = P(X=3 \text{ ή } X=-3) = P_X(3) + P_X(-3) = \frac{2}{7}$

Άρα $$P_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{7} & , y = 0 \\ \frac{2}{7} & , y = 1,4,9 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

(Καλύτερα να ελέγχω και αν η $P_X(x)$ είναι σ.π)

3. Έστω τ.μ X με σ.π $p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{?} & , x=0 \\ \frac{1}{2\nu} & , x = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(\nu-1) \end{cases}$ ②

Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ $Y = |X|$ (Άσκηση για σπίτι)

<u>Παρατήρηση</u>

2) Η τ.μ X είναι συνεχής

• <u>Μέθοδος α.σ.κ</u>

Έστω τ.μ X με γνωστή κατανομή ($σ.π.π$ f_X ή α.σ.κ F_X)

Ζητείται η κατανομή της τ.μ $Y = g(X)$. Η α.σ.κ της Y θα είναι

$F_Y(y) \overset{\text{ορ}}{=} P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = \ldots$

$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$

Παράδειγμα

1. Έστω τ.μ X με ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$ και α.σ.κ

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ x & , 0 < x < 1 \\ 1 & , x \geq 1 \end{cases}$$

Να βρεθεί η κατανομή της $Y = X^n$, $n \in \mathbb{N}$

Τιμές τ.μ Y: $y = x^n$ $x \in (0,1)$ Το $y \in (0,1)$

$$F_Y(y) \overset{\text{ορ}}{=} P(Y\le y) = P(X^n \le y) = P(X \le y^{1/n}) \overset{\text{ορ}}{=} F_X(y^{1/n}), \quad y\in(0,1)$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} (y^{1/n}) = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1} \qquad y\in(0,1)$$

Άρα $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1} & , y\in(0,1) \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$ (Καλύτερο να ελέγχω αν $\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,dy = 1$.)

2. α) Αν η τ.μ X είναι συνεχής με σ.π.π f_X να βρεθεί η σ.π.π της $Y=X^2$

β) Αν $X\sim N(0,1)$ ποια η κατανομή της $Y=X^2$

<u>Λύση</u>

α) $F_Y(y) = P(Y\le y) = P(X^2 \le y) = P(|X| \le \sqrt{y}) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) =$

$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(\sqrt{y}) - \frac{d}{dy} F_X(-\sqrt{y})$$

$$= \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}-1} f_X(\sqrt{y}) - \left(-\frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}-1}\right) f_X(-\sqrt{y}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right)$$

β) Εφαρμογή για $X\sim N(0,1)$ $\quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

3. α) Αν η τ.μ. X είναι συνεχής με σ.π.π f_X να προσδιοριστεί η σ.π.π της τ.μ $Y=|X|$

β) Αν $X\sim U(-1,1)$ ποια η σ.π.π της $Y=|X|$ (Άσκηση για το σπίτι)

4. Εστω συνεχής τ.μ. X με ασ.κ. $F_X(x)$ Εστω η τ.μ. $Y = F_X(X)$

Να δειχθεί ότι $Y \sim U(0,1)$

Λύση

Τιμές της $Y = F_X(X)$. Επειδή η F_X έχει σύνολο τιμών το ~~~~ $[0,1]$ το σύνολο τιμών της $Y = F_X(X)$ είναι το $[0,1]$

$$F_Y(y) \overset{\text{ορ}}{=} P(Y \le y) = P(F_X(X) \le y) = P(X \le F_X^{-1}(y)) \overset{\text{ορ}}{=} F_X(F_X^{-1}(y)) = y$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} y = 1$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & , y \in [0,1] \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

• Μέθοδος Μετασχηματισμού

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εστω συνεχής τ.μ. X με γνωστή σ.π.π. $f_X(x)$ και σύνολο δυνατών τιμών $x \in I \subseteq \mathbb{R}$. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $y = g(x)$ και υποθέτουμε ότι.

i) Ο $y = g(x)$ είναι 1-1 μετασχηματισμός του I στο $g(I) = \{y : y = g(x), x \in I\}$

ii) Η $\frac{d}{dy} g^{-1}(y)$ είναι συνεχής και $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) \neq 0$ $y \in g(I)$

Τότε η τ.μ. $Y = g(X)$ είναι συνεχής με τιμές στο $g(I)$

και σ.π.π $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| , y \in g(I)$

Παράδειγμα

1. Έστω συνεχής τ.μ X με κατανομή Beta (a, b)

Να βρεθεί η κατανομή της $Y = -\log X$

Αφού $X \sim Beta(a, b)$ $\quad f_X(x) = \frac{1}{Beta(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \quad 0<x<1$

Τιμές της X: $x \in I = (0,1)$

Θεωρούμε το μετασχηματισμό $y = g(x) = -\log x \quad , 0<x<1$

Τιμές Y: $y>0 \quad g(I) = (0, \infty)$

i) η g είναι 1-1 γιατί η $-\log$ είναι φθίνουσα

Αφού g είναι 1-1 $\exists$ η g^{-1}

Λύνω ως προς x $\quad x = g^{-1}(y) = e^{-y} \quad , y>0$

ii) $\frac{d}{dy} e^{-y} = -e^{-y}$

Προφανώς συνεχής και $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = -e^{-y} \neq 0 \quad , y>0$

$f_Y(y) = f_X(e^{-y}) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| = \frac{1}{Beta(a,b)} (e^{-y})^{a-1}(1-e^{-y})^{b-1} |-e^{-y}|$

$f_Y(y) = \frac{1}{B(a,b)} e^{-ay}(1-e^{-y})^{b-1} \quad y>0$

Άρα $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,b)} e^{-ay}(1-e^{-y})^{b-1} & , y>0 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$

Παρατήρηση

Αν $b=1$ τότε $B(a,b)=\frac{1}{a}$ $f_Y(y)=\begin{cases} a e^{-ay} & , y>0 \\ 0 & , αλλού \end{cases}$

$Y \sim Εκθ(a)$

2. Έστω η συνεχής τ.μ X με κατανομή Pareto και σ.π.π

$f_X(x) = \theta x^{-\theta-1}$, $x>1$, $\theta>0$

Να βρεθεί η κατανομή της $Y=\log x$

Τιμές X : $x>1$ $I=(1,\infty)$

Θεωρώ το μετασχηματισμό $y=g(x)=\log x$, $x>1$

Τιμές Y : $y>0$ $g(I)=(0,\infty)$

i) Επειδή $g(x)=\log x$ και η log είναι αύξουσα $x>1$

$\exists$ η g^{-1} και είναι η λύση ως προς x της $y=g(x)=\log x$

Δηλαδή $x=g^{-1}(y)=e^y$

ii) $\frac{d}{dy}g^{-1}(y) = \frac{d}{dy}e^y = e^y$ < συνεχής, $\frac{d}{dy}g^{-1}(y) \neq 0$ $y>0$

$f_Y(y) = f_X(e^y)\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right| = \theta(e^y)^{-\theta-1}|e^y| = \theta e^{-\theta y}$, $y>0$

Άρα $f_Y(y)=\begin{cases} \theta e^{-\theta y} & , y>0 \\ 0 & , αλλού \end{cases}$

Άρα $Y \sim Εκθ(\theta)$

3. Έστω συνεχής τ.μ X με $X \sim U(0,1)$

Να βρεθεί η σ.π.π της τ.μ $Y = e^X$

(Απάντηση: $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & , y \in (1, e) \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$ (Άσκηση για το σπίτι)